Лекция 11_ЖСТ дағы денелердің меншікті айналуы мәселесі

Осы тарауда біз сыналатын дененің өз айналуымен орталық дененің гравитациялық өрісіндегі ілгерілемелі қозғалысы туралы мәселені талқыладық. Оның айналмалы қозғалысы туралы не айта аласыз?
Бұл сұраққа жауап беруді айналу импульсін анықтау арқылы бастайық, немесе сол сияқты, сынақ денесінің дұрыс бұрыштық импульсін анықтау. Ол үшін трансляциялық импульс $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}$ -ге ұқсастығы бойынша $\vec{S}$ -ні анықтау мүмкіндігіміз бар

$$\vec{S} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}}. \qquad (1)$$

Содан кейін екі айналмалы дене есебінің лагранжынан $\vec{\omega}$ -ге қатысты векторлық туындысын алу

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + T + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{8}mv^4 + \left(\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{3}{2}T\right)v^2 - \frac{1}{4}J(\vec{\omega}\vec{v})^2\right] +$$

$$+\frac{\gamma m m_0}{r}\left[1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\xi_0}{m_0} + \frac{\xi}{m}\right) - \frac{\gamma m_0}{2c^2 r}\right] + \frac{\gamma}{2c^2}\left(\left[\left(3m_0\vec{S} + 4m\vec{S}_0\right)\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) +$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r} + \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}\ , \qquad (2)$$

мұндағы J - сынақ денесінің айналу осіне қатысты инерция моменті, бізде бар

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{8U}{3c^2}\right)\vec{\omega} - \frac{J}{c^2}\left[\frac{(\vec{\omega}\vec{v})}{2}\vec{v} + \frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} + 2\mathrm{rot}\vec{U}\right]. \qquad (3)$$

Мұнда қолданылатын формула түрі (1.69)

$$\xi = \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{8}{3}T. \qquad (4)$$

Бір қызығы, айналу импульсі (жалпыланған айналу импульсі) $\vec{S}$ тек $\vec{\omega}$ -ге пропорционалды мүшені ғана емес, сонымен қатар $\vec{v}$, $\vec{M}$, $\vec{S}_0$ және $\vec{r}$ -ке пропорционалды мүшелерді де қамтиды

$$\mathrm{rot}\vec{U} = \frac{\gamma}{2}\left(-\frac{\vec{S}_0}{r^3} + \frac{3\vec{r}\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)}{r^5}\right). \qquad (5)$$

Бұл тұрғыда алға бағытталған импульс $\vec{p}$ -мен белгілі бір ұқсастық бар. Алға

бағытталған импульс $\vec{p}$ тек $\vec{v}$-ге пропорционал мүшені ғана емес, сонымен қатар $\vec{\omega}$, $[\vec{S}\vec{r}]$ және $[\vec{S}_0\vec{r}]$-ке пропорционал мүшелерді де қамтиды. Егер уақыттың бастапқы
моментінде $\omega = 0$ болса, онда (1.178)-ден мынадай қорытынды шығады:

$$\vec{S} = -\frac{J}{c^2}\left(\frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} + 2\mathrm{rot}\vec{U}\right). \qquad (6)$$

Бұл бұрыштық жылдамдықпен индукцияланған айналу пайда болған сияқты көрінеді

$$\vec{\omega}_{ин} = -\frac{3\gamma m_0}{2mc^2r^3}\vec{M} - \frac{2}{c^2}\mathrm{rot}\vec{U}\,. \qquad (7)$$

Уақыт бойынша $\vec{S}$ векторын өзгерту үшін теңдеулер формасын қалай табуға болады? Бұл мәселені түсіну үшін біз қарастырып отырған екі дененің өзіндік айналуымен бастапқы гамильтонианды жазамыз

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{S^2}{2J} - mU - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{p^4}{8m^3} + \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{3T}{2}\right)\frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{4m^2}(\vec{S}\vec{p})(\vec{\omega}\vec{p}) + \right.$$

$$\left. + \frac{3p^2}{2m}U + \left(\frac{\xi_0}{m_0} + \frac{\xi}{m}\right)mU - \frac{mU^2}{2}\right\} -$$

$$-\frac{\gamma}{2mc^2}\left(\left[(3m_0\vec{S} + 4m\vec{S}_0)\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{p}\right) - \frac{\gamma}{c^2}\left([\vec{S}\vec{\nabla}]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right) - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left([\vec{S}_0\vec{\nabla}]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right). \qquad (8)$$

Енді $\vec{S}$-векторды өзгертуге арналған теңдеудің жалпы көрінісі келесідей болуы мүмкін екенін атап өткен жөн

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{e}_S + [\vec{\Omega}_S\vec{S}]. \qquad (9)$$

dS/dt және $\vec{\Omega}_S$ анықтау қалады . Бұл тармақта сіз $\vec{M}$ пен $\vec{S}$ арасындағы ұқсастықты жасай аласыз және $\vec{M}$ векторлық элементтің әрекеттерін зерттеу кезінде алынған нәтижелерді пайдалана аласыз . Шынында да, гамильтониан (1.183) айналмалы координаттарға тәуелді емес болғандықтан, оны қоюға болады

$$\frac{dS}{dt} = 0. \qquad (10)$$

$\vec{\Omega}_S$-ге келетін болсақ

$$\vec{\Omega}_S = \frac{\partial H}{\partial \vec{S}}. \tag{11}$$

Осылайша, сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеуі келесідей болады

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_S \vec{S}\right]. \tag{12}$$

Бір қызығы, (1.187) теңдеуі келесі жазбаға мүмкіндік береді

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{S}\right]. \tag{13}$$

Брумбергтің монографиясында [12, б. 311] айналмалы қозғалыс теңдеуі алынды. Біздің мәселеге қатысты оның формасы бар

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{S}\right], \tag{14}$$

мұндағы

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3U}{c^2}\right)\vec{\omega} + \frac{J}{c^2}\left[\frac{1}{2}\left[\vec{v}\left[\vec{\omega}\vec{v}\right]\right] - \frac{3\gamma m_0}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{v}\right] - \frac{\gamma}{r^5}\left(3\vec{r}\left(\vec{r}\vec{S}_0\right) - r^2\vec{S}_0\right)\right]. \tag{15}$$

Бұл өрнектерді (1.178) және (1.190) арқылы салыстыра отырып, біз әртүрлі тәсілдер негізінде алынғанына қарамастан, біздің нәтижелеріміз бен Брумберг нәтижелері сәйкес келетініне сенімдіміз. Бұл тұжырым (1.178) түрінде ұсынылса, одан да айқын болады

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{8U}{3c^2}\right)\vec{\omega} + \frac{J}{c^2}\left[\frac{1}{2}\left[\vec{v}\left[\vec{\omega}\vec{v}\right]\right] - \frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} - 2\operatorname{rot}\vec{U}\right]. \tag{16}$$

Оң жақтағы алғашқы мүшелер арасындағы шамалы айырмашылық (1.190) және (1.191) біздің жұмысымызда және Брумбергте қабылданған дененің ішкі құрылымына қатысты болжамдағы айырмашылыққа байланысты.

Орташа туралы бірнеше сөз айналмалы қозғалыс теңдеуі сынақ денесінің. Жазыңыз

$$\bar{L} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0{}^2} + T - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0{}^2} - \varepsilon - \frac{25}{6}T - \frac{m}{m_0}\xi\right)\frac{\alpha^2}{M_0{}^2} + \right.$$

$$+ \frac{J\alpha^2}{4M_0{}^2\left(1 + \frac{M}{M_0}\right)}\left(\left(\vec{\omega}\vec{e}_A\right)^2 + \frac{M}{M_0}\left(\vec{\omega}\vec{e}_p\right)^2\right) - \frac{3m\alpha^4}{MM_0{}^3} +$$

$$+\frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0{}^3 M^3}\left[2\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)+\frac{3m_0}{2m}\left(\vec{S}\vec{M}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{S}^*\vec{S}_0\right)-\frac{3}{2M^2}\left(\vec{S}^*\vec{M}\right)\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\right]\Bigg\}. \tag{17}$$

Естеріңізге сала кетейік

$$\vec{S}^* = \vec{S} + \frac{2m}{7m_0}\vec{S}_0. \tag{18}$$

Содан кейін

$$\vec{S} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \vec{\omega}} = \left(1+\frac{25\alpha^2}{6M_0{}^2c^2}\right)J\vec{\omega} - \frac{J}{c^2}\left\{\frac{\alpha^2}{2M_0(M_0+M)}\left(\left(\vec{\omega}\vec{e}_A\right)\vec{e}_A + \frac{M}{M_0}\left(\vec{\omega}\vec{e}_p\right)\vec{e}_p\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0{}^3 M^3}\left[\frac{3m_0}{2m}\vec{M} + \frac{\vec{S}_0}{2} - \frac{3}{2}\left(\vec{S}_0\vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right]\right\}. \tag{19}$$

Айналмалы қозғалыстың орташа теңдеуі келесідей жазылады

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\overline{\vec{\Omega}_S}\vec{S}\right], \tag{20}$$

мұндағы

$$\overline{\vec{\Omega}_S} = \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{e}_S} = \frac{\alpha^2}{2M_0(M_0+M)c^2}\left(\left(\vec{\omega}\vec{e}_A\right)\vec{e}_A + \frac{M}{M_0}\left(\vec{\omega}\vec{e}_p\right)\vec{e}_p\right)+$$
$$+\frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0{}^3 M^3}\left[\frac{3m_0}{2m}\vec{M} + \frac{\vec{S}_0}{2} - \frac{3}{2}\left(\vec{S}_0\vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right]. \tag{21}$$

Қолданылған әдебиет

[1]. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., 1955, 159 с.

[1]. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, 563 с.

[3]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1973, 400 с.

[4]. Эйнштейн А., Инфельд Л., Гоффман Б. Гравитационные уравнения и проблема движения // Эйнштейн А. Собр. научн. трудов. М., 1966. Т.2. с. 450-513.

[5]. Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. М., 1962, 204 с.

[6]. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ, 1939, Т.9. с. 375-410.

[7]. Schwarzschild, Sitzungsber. d. */Akad.d.Wissensch., S.189,1916.

[8]. Kerr R.P., Phys. Rev. Letters, 11,237(1963).

[9]. De Donder. La gravifique einsteinienne. Paris, 1921.

[10]. K.Lanczos. Phys.ZS. 23, 537, 1923.

[11]. Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988, 198 с.

[12]. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972, 382 с.

[13]. Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара. Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985, с. 20-25.

[14]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1973, 207 с.

[15]. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968, 799 с.

[16]. Бергман П. Введение в теорию относительности. М., 1947, 380 с.

[17]. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962, 1094 с.

[18]. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М., 1974, 569 с.

[19]. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. Минск, 1979, 334 с.